Erinnerung:

Betrachte zwei K-Vektorräume V_1 und V_2.

Definition: Ein *Tensorprodukt von V_1 und V_2 über K* besteht aus einem K-Vektorraum $\tilde{V}$ und einer bilinearen Abbildung $\kappa\colon V_1 \times V_2 \to \tilde{V}$ mit der *universellen Eigenschaft:*

Für jeden K-Vektorraum W und jede bilineare Abbildung $\varphi\colon V_1 \times V_2 \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon \tilde{V} \to W$ mit $\overline{\varphi} \circ \kappa = \varphi$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & W \\
& \tilde{V} \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposition: Ein Tensorprodukt ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie, mit anderen Worten: Ist sowohl $(\tilde{V}, \kappa)$ wie $(\tilde{V}', \kappa')$ ein Tensorprodukt von V_1 und V_2, so existiert ein eindeutiger Isomorphismus $i\colon \tilde{V} \xrightarrow{\sim} \tilde{V}'$ mit $i \circ \kappa = \kappa'$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[rr, "\kappa'"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & \tilde{V}' \\
& \tilde{V} \arrow[ur, dotted, "\cong", "i"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\kappa"] \arrow[ddr, "\tilde{\kappa}"'] & & W \\
& \tilde{V} \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "\wr"'] & \\
& \tilde{\tilde{V}} \arrow[uur, dashed, "\tilde{\overline{\varphi}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Satz: Ein Tensorprodukt existiert immer.

Beweis: Seien B_1, B_2 Basen von V_1, V_2. Setze $\tilde V := K^{(B_1 \times B_2)} = \{(z_{b_1 b_2})_{b_1, b_2} \mid \text{alle } z_{b_1 b_2} \in K \text{ fast alle } 0\}$

$\kappa : V_1 \times V_2 \to \tilde V$, $\underbrace{(v_1, v_2) = \left(\sum'_{b_1 \in B_1} x_{b_1} b_1 , \sum'_{b_2 \in B_2} y_{b_2} b_2 \right)} \mapsto \underbrace{(\underbrace{x_{b_1} \cdot y_{b_2}})_{b_1, b_2}}$ bilinear.

Sei $\varphi : V_1 \times V_2 \to W$ bilinear.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\kappa"'] & W \\ \tilde V \arrow[ur, dashed, "\bar\varphi\ ?"'] & \end{tikzcd}$$

$$\varphi\left(\sum'_{b_1} x_{b_1} b_1 , \sum'_{b_2} y_{b_2} b_2 \right) = \sum'_{b_1} \sum'_{b_2} \underbrace{x_{b_1} y_{b_2}} \cdot \varphi(b_1, b_2)$$

Setze $\bar\varphi : \tilde V \to W$, $(z_{b_1 b_2}) \longmapsto \sum'_{b_1, b_2} \underbrace{z_{b_1 b_2}}_{\text{fast alle } 0} \cdot \varphi(b_1, b_2)$

wohldefinierte lineare Abb.
mit $\bar\varphi \circ \kappa = \varphi$.

Umgekehrt sei $\bar\varphi : \tilde V \to W$ linear mit $\bar\varphi \circ \kappa = \varphi$.

Dann gilt $\bar\varphi\left((z_{b_1 b_2})_{b_1, b_2}\right) = \sum_{b_1, b_2} z_{b_1 b_2} \cdot \underbrace{\bar\varphi(e_{b_1, b_2})}$

$$\bar\varphi(e_{b_1, b_2}) = \bar\varphi(\kappa(b_1, b_2)) = \varphi(b_1, b_2).$$

$(z_{b_1 b_2})_{b_1, b_2} = \sum_{b_1, b_2} z_{b_1 b_2} \cdot e_{b_1, b_2}$

für $e_{b_1, b_2} = \left(\begin{cases} 1 & (b_1', b_2') = (b_1, b_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)_{b_1', b_2'}$.

Basis von $\tilde V$.

$e_{b_1 b_2} = \kappa(b_1, b_2)$.

Also ist $\bar\varphi$ eindeutig.

qed

Konvention: Wir fixieren ein für alle Mal ein Tensorprodukt $(\tilde{V}, \kappa)$ und bezeichnen den Vektorraum $\tilde{V}$ mit $V_1 \otimes_K V_2$ oder kurz $V_1 \otimes V_2$, sowie die Abbildung κ mit

$$V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes_K V_2, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2.$$

Sprich: „v_1 tensor v_2".

Danach vergessen wir die Notation $(\tilde{V}, \kappa)$.

Bemerkung: Wir kümmern uns also nicht darum, wie das Tensorprodukt genau konstruiert ist, sondern benutzen nur seine universelle Eigenschaft. Die Eindeutigkeit bis auf eindeutige (!) Isomorphie bewirkt, dass jedes Element einer zweiten Wahl von $(\tilde{V}, \kappa)$ einem eindeutigen Element der ersten Wahl entspricht, und dass diese Elemente jeweils dieselben Formeln erfüllen und dieselben sonstigen Eigenschaften besitzen.

Rechenregeln: Die Bilinearität von κ übersetzt sich in die folgenden Rechenregeln für alle $v_i, v_i' \in V_i$ und $\lambda \in K$:

$(v_1 + v_1') \otimes v_2 = v_1 \otimes v_2 + v_1' \otimes v_2$	$\lambda v_1 \otimes v_2 = \lambda(v_1 \otimes v_2)$
$v_1 \otimes (v_2 + v_2') = v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes v_2'$	$v_1 \otimes \lambda v_2 = \lambda(v_1 \otimes v_2)$

Definition: (a) Ein Element von $V_1 \otimes_K V_2$ heisst ein *Tensor.*

(b) Ein Element der Form $v_1 \otimes v_2$ heisst ein *reiner Tensor.*

Satz: Sei jeweils B_i eine Basis von V_i. Dann sind die $b_1 \otimes b_2$ für alle $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ verschieden, und $\{b_1 \otimes b_2 \mid (b_1, b_2) \in B_1 \times B_2\}$ ist eine Basis von $V_1 \otimes_K V_2$. Insbesondere gilt

$$\dim_K(V_1 \otimes_K V_2) = \dim_K(V_1) \cdot \dim_K(V_2).$$

✓

Bew.: $\tilde{V} = K^{(B_1 \times B_2)}$ wie den,
Basis $e_{b_1 b_2} = \kappa(b_1, b_2) = b_1 \otimes b_2$.

$\dim(\tilde{V}) = |B_1 \times B_2| = |B_1| \cdot |B_2| = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2)$. qed.

Folge: Die reinen Tensoren erzeugen $V_1 \otimes_K V_2$.

Beweis: Die $b_1 \otimes b_2$ erzeugen $V_1 \otimes V_2$. qed.

Proposition: Betrachte Vektoren $v_i, v_i' \in V_i$.

(a) Es ist $v_1 \otimes v_2 \neq 0$ genau dann, wenn $v_1, v_2 \neq 0$ sind.

(b) Im Fall (a) ist $v_1 \otimes v_2 = v_1' \otimes v_2'$ genau dann, wenn $\exists \lambda \in K^\times : (v_1', v_2') = (\lambda v_1, \lambda^{-1} v_2)$.

(c) Sind v_1, v_1' bzw. v_2, v_2' linear unabhängig, so ist $v_1 \otimes v_2 + v_1' \otimes v_2'$ kein reiner Tensor.

Bew.: (a) $v_1 = 0 \Rightarrow v_1 \otimes v_2 = (0 \cdot v_1) \otimes v_2 = 0(v_1 \otimes v_2) = 0$

$v_2 = 0 \Rightarrow v_1 \otimes v_2 = v_1 \otimes (0 \cdot v_2) = 0 \cdot (v_1 \otimes v_2) = 0$

$v_1, v_2 \neq 0 \Rightarrow$ Wähle Basis B_1 von V_1 mit $v_1 \in B_1$.
 " " B_2 " V_2 " $v_2 \in B_2$.
$\Rightarrow v_1 \otimes v_2$ ist Teil einer Basis von $V_1 \otimes V_2$
$\Rightarrow v_1 \otimes v_2 \neq 0$.

(b) $\left.\begin{array}{l} v_1' = \lambda v_1 \\ v_2' = \lambda^{-1} v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow v_1' \otimes v_2' = (\lambda v_1) \otimes (\lambda^{-1} v_2) = \lambda \cdot \lambda^{-1} (v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2$.

Umgekehrt: Sei $\underbrace{v_1 \otimes v_2}_{\neq 0} = v_1' \otimes v_2'$. Dann ist $v_1', v_2' \neq 0$ nach (a).

Sei $v_1' = \lambda \cdot v_1 \Rightarrow v_1' \otimes v_2' = (\lambda v_1) \otimes v_2' = \lambda \cdot (v_1 \otimes v_2') = v_1 \otimes (\lambda v_2')$

$\Rightarrow 0 = v_1 \otimes v_2 - v_1' \otimes v_2' = v_1 \otimes v_2 - v_1 \otimes (\lambda v_2') = \underbrace{v_1}_{\neq 0} \otimes (v_2 - \lambda v_2')$.

Nach (a) folgt $v_2 - \lambda v_2' = 0 \Rightarrow v_2' = \lambda^{-1} v_2$.

Ist $v_2' = \mu \cdot v_2 \Rightarrow$ analog $v_1' = \mu^{-1} v_1$.

Sind v_1, v_1' bzw. v_2, v_2' lin. unabh. $\Rightarrow$ Wähle Basis B_i von V_i mit $v_i, v_i' \in B_i$ für $i = 1, 2$.

$\Rightarrow v_1 \otimes v_2 \neq v_1' \otimes v_2'$

(c) Sei $v_1 \otimes v_2 + v_1' \otimes v_2' = w_1 \otimes w_2$.

Wähle B_i wie in (b). Schreibe $w_i = \alpha_i v_i + \beta_i v_i' +$ (Linearkombination der übrigen)

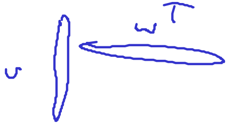
$\Rightarrow w_1 \otimes w_2 = \alpha_1 \alpha_2 \cdot (v_1 \otimes v_2) + \alpha_1 \beta_2 (v_1 \otimes v_2') + \alpha_2 \beta_1 (v_1' \otimes v_2) + \beta_1 \beta_2 (v_1' \otimes v_2')$

$+$ (Linearkombination der übrigen)

Vergleiche Koeffizienten: $\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \alpha_2 = 1 \\ \beta_1 \beta_2 = 1 \\ \alpha_1 \beta_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Widerspruch.

qed.

Beispiel: Für alle natürlichen Zahlen m, n existiert ein natürlicher Isomorphismus



$$K^m \otimes_K K^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \quad \text{mit} \quad v \otimes w \mapsto v \cdot w^T.$$

Bem.: K^m hat (Standard) Basis $\{e_1, \dots, e_m\}$
K^n . . . . . $\{e'_1, \dots, e'_n\}$

$\bar{f}(e_i \otimes e'_j) = f(e_i, e'_j) = e_i e_j'^T = E_{ij}$

Die Abb. $K^m \times K^n \xrightarrow{f} \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $(v, w) \longmapsto v \cdot w^T$ ist bilinear. Nach der UE von $K^m \otimes K^n$ existiert genau eine lin. Abb. $K^m \otimes K^n \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ mit $\bar{f} \circ \kappa = f$. Dieses $\bar{f}$ bildet eine Basis von $K^m \otimes K^n$ bijektiv auf eine Basis von Mat.. ab.

Proposition: Für alle V und W existiert ein natürlicher injektiver Homomorphismus

$$V^\vee \otimes_K W \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W) \quad \text{mit} \quad \ell \otimes w \mapsto (v \mapsto \ell(v) \cdot w).$$

Sein Bild ist der Unterraum aller Homomorphismen von endlichem Rang. Insbesondere ist er ein Isomorphismus genau dann, wenn V oder W endlich-dimensional ist.

Bem.: Die Abb. $V^\vee \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $(\ell, w) \longmapsto (v \longmapsto \ell(v) \cdot w)$ ist wohl definiert und bilinear. Nach der UE existiert eine eindeutige lin. Abb. $V^\vee \otimes_K W \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit der obigen Eigenschaft.

Injektivität: Sei L eine Basis von $V^\vee$, C . . . W $\Rightarrow$ $\{\ell \otimes c \mid \ell \in L, c \in C\}$ Basis von $V^\vee \otimes W$.

$$\sum_{\ell, c}{}' \lambda_{\ell c} \cdot \ell \otimes c \text{ liegt im Kern} \iff \forall v \in V: \sum_{\ell, c}{}' \lambda_{\ell c} \cdot \ell(v) \cdot c = 0.$$

$$\iff \forall v \in V: \sum_{c \in C}{}' \Big(\sum_{\ell \in L}{}' \lambda_{\ell c} \cdot \ell(v) \Big) \cdot c = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall v \in V : \forall c \in C : \sum_{\ell \in L}{}' \lambda_{\ell c} \cdot \ell(v) = 0 .$$

C Basis

$$\Longleftrightarrow \forall c \in C ; \forall v \in V ; \Big(\sum_{\ell \in L} \lambda_{\ell c} \cdot \ell \Big)(v) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall c \in C : \sum_{\ell \in L} \lambda_{\ell c} \cdot \ell = 0 .$$

L Basis:

$$\Longleftrightarrow \forall c \in C \; \forall \ell \in L : \lambda_{\ell c} = 0 .$$

Also ist der Kern Null $\Longrightarrow$ injektiv.

<u>Bemerkung</u>: Ist $\dim(V), \dim(W) < \infty$, dann ist

$$\dim(V^\vee \otimes_K W) = \dim(V) \cdot \dim(W) = \dim(\mathrm{Hom}_K(V, W))$$

Also ist dann $V^\vee \otimes_K W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(V, W)$.